

یک الگوریتم جدید مبتنی بر آتاماتای یادگیر توزیع شده توسعه یافته برای یادگیری پارامتری شبکه بیزی

محمد رضا ملاخلیلی میبیدی، محمدرضا میبیدی

دیگر، یادگیری برخط قرار دارد. در این نوع یادگیری، هدف تطبیق دادن مدل فعلی (و احتمالاً ناقص) موجود با مجموعه‌ای از داده‌های نمونه است. این نوع یادگیری برای مواردی که به دلیل دقت پایین مدل اولیه و یا بروز تغییرات در محیط و پیدایش شواهد و نمونه‌های جدید، بهبود بخشیدن به مدل فعلی مورد نیاز است، کاربرد دارد.

در ساخت شبکه‌های بیزی با دو مساله روبرو هستیم. یادگیری ساختار شبکه بیزی (ساخت گراف) و یادگیری پارامترهای (جدول احتمال شرطی) متناظر با گره‌های گراف. یادگیری پارامترهای یک شبکه بیزی به دلیل سختی انتصاب مقادیر عددی تخمینی مناسب به پارامترها، با توسل به مفهوم بیزی احتمال، کاری پیچیده است. علاوه بر اینکه یادگیری پارامتری، بخشی از الگوریتم‌هایی را تشکیل می‌دهد که به مساله یادگیری ساختاری شبکه بیزی می‌پردازند [۲]. در این مقاله، مساله یادگیری ساختاری مورد بررسی نیست. به بیان دیگر، فرض می‌کنیم یک شبکه بیزی با ساختار معین S که مقادیر پارامترهای آن توسط بردار θ به شکل عددی داده شده، موجود است. هدف استفاده از مجموعه داده D برای ساخت یک شبکه بیزی با همان ساختار S و بردار پارامترهای θ^{new} است.

ادامه این مقاله به این ترتیب سازماندهی شده است در بخش دوم ضمن بررسی مختصر شبکه‌های بیزی، برخی از مبانی ریاضی مورد استفاده در سایر بخش‌های مقاله را بررسی خواهیم کرد. ضمن این که برخی از کارهای مشابهی که در این زمینه صورت گرفته است را بررسی کرده و وجه تمایز روش پیشنهادی با آنها را روشن خواهیم کرد. در بخش سوم، چارچوب جدید پیشنهادی را معرفی کرده و به بررسی تئوریک آن خواهیم پرداخت. بخش چهارم به بررسی عملی چارچوب پیشنهادی اختصاص یافته است.

۲- مبانی ریاضی:

شبکه بیزی:

شبکه‌های بیزی ابزاری کارآمد برای نمایش و استدلال تحت شرایط عدم قطعیت هستند. یک شبکه بیزی، نمایش فشرده‌ای از توزیع احتمال توأم بر روی مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی است. این مدل شامل یک گراف است که به صورت کیفی، روابط استقلال میان متغیرها را در خود ذخیره می‌کند. علاوه بر این، شامل پارامترهایی است که به صورت کمی،

چکیده - در این مقاله یک آتاماتای توزیع شده جدید به نام آتاماتای یادگیر توزیع شده توسعه یافته برای یادگیری توزیع توأم مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی معرفی خواهد شد. این شبکه از آتاماتاها، در محیط‌هایی که پاسخ محیط به مجموعه‌ای از اقدامات انجام شده توسط آتاماتا، مستقل از یکدیگر نبوده و نوعی وابستگی شرطی میان این پاسخ‌ها حاکم باشد، کاربرد دارد. نشان داده شده که این آتاماتای جدید قادر است تخمینی از توزیع شرطی اقدام‌ها را فرا بگیرد. در ادامه چارچوبی مبتنی بر آتاماتای یادگیر توزیع شده جدید پیشنهادی، برای حل مساله یادگیری برخط پارامترهای یک شبکه بیزی ارائه شده است. این چارچوب با داده‌ها و شواهد جدید منطبق شده و عملیات به‌روزرسانی پارامترها را انجام می‌دهد. با بررسی‌های ریاضی و آزمایش‌های عملی روی شبکه‌های نمونه، نشان داده‌ایم که این مدل جدید قادر است با تخمینی با دقت برابر با EM، یادگیری پارامترهای یک شبکه بیزی را انجام دهد. علاوه بر ویژگی افتراقی بودن و یادگیری برخط، این ساختار جدید با شرایطی که داده‌ها ناکامل باشند نیز سازگار است و به دلیل استفاده از روابط یادگیری خطی و مبتنی بر آتاماتای یادگیر، سربار محاسباتی کمی نیز دارد.

کلید واژه - آتاماتای یادگیر، شبکه بیزی، یادگیری پارامتری

۱- مقدمه

مساله یادگیری شبکه بیزی از روی داده‌ها، یکی از مسائل مورد توجه در حوزه‌های مرتبط با شبکه‌های بیزی است که توجه زیادی را به خود معطوف کرده است. ساخت شبکه‌های بیزی بزرگ مرتبط با یک زمینه خاص به شکل دستی توسط یک متخصص در زمینه مورد نظر، فرآیندی زمان‌بر و پیچیده است. علاوه بر این که مدل ساخته شده توسط یک متخصص، الزاماً مناسب‌ترین مدل برای آن حوزه مشخص نیست. ضمن این که به علت پویایی جهان واقعی، استفاده از مدل‌های ایستا نیز چندان مورد پسند نیست. مدل‌هایی که به صورت پویا با شرایط متغیر موجود خود را تطبیق دهند در کانون توجه است [۱]. بیشتر کارهایی که در زمینه یادگیری شبکه بیزی صورت گرفته، به بررسی یادگیری دسته‌ای پرداخته‌اند. در این نوع یادگیری، تعدادی نمونه وجود دارد و هدف، ساخت یک شبکه بیزی است که به بهترین نحو داده‌ها را مدل کند. اما در سمت

مقاله در تاریخ ۲۵ فروردین ماه ۱۳۹۲ دریافت شد.

محمد رضا ملاخلیلی میبیدی، دانشکده مهندسی کامپیوتر، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات تهران (email: m.meybodi@srbiau.ac.ir)
محمد رضا میبیدی، آزمایشگاه محاسبات نرم، دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران (email: mmeybodi@aut.ac.ir)

این صورت قانون درست‌نمایی بیشینه توصیه می‌کند مدلی انتخاب شود که $LL(M|D)$ را روی مجموعه داده‌های D بیشینه کند. به عبارت دیگر اگر قصد تخمین توزیع‌های شرطی را داریم در این صورت مدل‌های ممکن M_θ روی ساختار اتفاق نظر دارند، اما روی پارامترها متفاوت هستند. در این صورت بایستی یک تخمین‌گر پارامتر θ را به گونه‌ای انتخاب کنیم که درست‌نمایی را بیشینه کند. یعنی

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta} L(M_\theta | D) = \arg\max_{\theta} LL(M_\theta | D) \quad (۳)$$

در ادامه از نماد $\hat{\theta}$ به منظور نمایش تخمین بیشینه درست‌نمایی برای پارامتر θ استفاده می‌کنیم.

اگر فرض کنیم D شامل n نمونه و هر نمونه $d_i \in D$ یک نمونه کامل و برابر با $(x_{i,1}, \dots, x_{i,u})$ باشد در این صورت

$$LL(M|D) = \sum_{i=1}^n P(d_i) = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^u P(x_{i,j} | pa(x_{i,j})) \quad (۴)$$

با توجه به معین بودن ساختار، مساله بالا به تخمین تعدادی P_{ijk} کاهش می‌یابد؛ احتمال مربوط به متغیر i در k امین حالتش به شرط داشتن والد j . در این صورت تخمین مربوط به P_{ijk} برابر است با

$$\hat{P}_{ijk} = \frac{n_{ijk}}{n_{ij}} \quad (۵)$$

در (۵) n_{ijk} عبارت است از تعداد نمونه‌های آموزشی که در آن k امین حالت x_i با j امین حالت والدپایش رخ می‌دهد و n_{ij} مجموع n_{ijk} ها به ازای تمام مقادیر k است. به این ترتیب در شبکه‌های بی‌زی برای بیشینه تخمین درست‌نمایی کافی است مقادیر را از طریق شمارش محاسبه کنیم. [۱]، [۲]

روش تخمین بی‌زین :

در این روش از یک توزیع پیشین استفاده شده و با استفاده از نمونه‌ها و تجربیات مکرر، توزیع احتمال به روزرسانی می‌شود. مطابق با روش بی‌زی، اگر H یک فرضیه باشد و E گزاره‌ای که نشان‌گر یک نمونه است، رابطه بی‌ز به صورت (۶) خواهد بود:

$$P(H|E) = P(H) \times P(E|H) / P(E) \quad (۶)$$

در (۶)، $P(H|E)$ درجه باور پسین یا درجه باور به H پس از مشاهده E است. $P(E|H)/P(E)$ را درست‌نمایی می‌نامند. درست‌نمایی، اثر E در میزان باور به H را نمایش می‌دهد. $P(H)$ درجه باور به H قبل از مشاهده E است. استفاده مکرر از (۶) با استفاده از شواهد E باعث به‌روز شدن $P(H)$ می‌گردد.

حال فرض کنید θ مجموعه‌ای از پارامترها باشد که بایستی مورد استنتاج قرار گیرند و $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ یک مجموعه مستقل از مشاهدات باشد. فرض می‌کنیم توزیع e_i به صورت $P(e_i|\theta)$ و توزیع اولیه θ مقدار $P(\theta|\alpha)$ باشد که α برداری از آبرپارامترها است.

به همراه ساختار ارائه شده توسط گراف مزبور، یک توزیع منحصر به فرد ایجاد می‌نمایند [۲].

تعریف ۱: یک شبکه بی‌زی $B = (G, \Theta)$ نمایانگر یک توزیع احتمال توأم بر روی مجموعه متغیرهای تصادفی $X = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$ است که متشکل از دو بخش می‌باشد. بخش اول گراف جهت‌دار بدون دور G است که گره‌های آن، متناظر با متغیرهای تصادفی است و ساختار آن روابط استقلال مارکوف را در خود ذخیره می‌کند. بخش دوم آن مجموعه‌ای از پارامترهای Θ است که توزیع احتمال متغیر تصادفی X_i به شرط معلوم بودن مقادیر والدی آن، $p(x_i | pa(x_i))$ را تعیین می‌نماید.

یادگیری پارامترها با داده‌های کامل: یک مدل مولد، مانند شبکه‌های بی‌زی، مدلی است که به کمک ساختارها و پارامترهای درونی خود بتواند نحوه تولید داده‌های مشاهده شده را مشخص کند. در یادگیری پارامتری یک شبکه بی‌زی از روی داده‌ها، به دنبال این هستیم که شبکه بی‌زی حاصل بتواند توزیع احتمال واقعی P^* را که داده‌ها به وسیله آن تولید شده‌اند، را فرا بگیرد.

در عمل ما با یک مشکل اساسی‌تر نیز مواجه می‌شویم. به جای در اختیار داشتن P^* و یا تعداد نامحدودی نمونه تولید شده توسط P^* ، تعداد محدودی از داده‌های آموزشی $D = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ که به صورت مستقل از هم، از توزیع P^* تولید شده‌اند را در اختیار داریم. حال با در اختیار داشتن اطلاعات محدودی که از طریق D به دست آمده است، می‌خواهیم به گونه‌ای مدل $B = (G, \Theta)$ را بیاموزیم که این مدل بهترین تقریب برای P^* باشد. یک راهکار متداول استفاده از روش تخمین درست‌نمایی بیشینه است.

روش تخمین درست‌نمایی بیشینه:

روش تخمین درست‌نمایی بیشینه در بسیاری از زمینه‌های یادگیری استفاده می‌شود. در بطن آن ایده ساده‌ای وجود دارد که بر اساس آن مدل مناسب، مدلی است که برانزنده مناسبی برای داده‌های D باشد. بنابراین لازم است احتمال این که یک مدل، مولد داده‌های مشاهده شده باشد را محاسبه کرد.

تعریف ۲: برای هر نمونه $d \in D$ ، احتمال $P(d|M)$ درست‌نمایی M با فرض d نامیده می‌شود. با فرض این که نمونه‌های موجود در D مستقل هستند، درست‌نمایی M با فرض D برابر است با

$$L(M|D) = \prod_{d \in D} P(d|M) \quad (۱)$$

برای سهولت در محاسبات، از طرفین (۱) لگاریتم می‌گیرند. لگاریتم $L(M|D)$ را \log -likelihood می‌نامند که محاسبه آن در (۲) نشان داده شده است.

$$LL(M|D) = \prod_{d \in D} \log_2 P(d|M) \quad (۲)$$

اگر قادر به انتخاب چندین مدل مختلف برای توصیف داده‌ها باشیم، در

آتاماتای یادگیر و آتاماتای یادگیر توزیع شده

آتاماتای یادگیر یک مدل انتزاعی است که به طور تصادفی یک عمل از مجموعه متناهی اعمال خود را انتخاب کرده و بر محیط اعمال می‌کند. محیط عمل انتخاب شده توسط آتاماتای یادگیر را ارزیابی و نتیجه آن را توسط یک سیگنال تقویتی به آتاماتای یادگیر اطلاع می‌دهد. سپس آتاماتای یادگیر با اطلاع از عمل انتخاب شده و سیگنال تقویتی، وضعیت داخلی خود را به روز کرده و عمل بعدی خود را انتخاب می‌کند. آتاماتای یادگیر به دو دسته آتاماتای یادگیر با ساختار ثابت و آتاماتای یادگیر با ساختار متغیر تقسیم می‌گردند. [۳]-[۵]

آتاماتای یادگیر با ساختار متغیر توسط چهار تایی $\{\alpha, \beta, p, T\}$ نشان داده می‌شود که در آن $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ مجموعه اعمال آتاماتای یادگیر، $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\}$ مجموعه ورودی‌های آتاماتای یادگیر، $p = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ بردار احتمال انتخاب هر یک از عمل‌ها و T ، $p(n+1) = T[\alpha(n), \beta(n), p(n)]$ الگوریتم یادگیری آتاماتای یادگیر می‌باشد. الگوریتم‌های یادگیری متنوعی برای آتاماتای یادگیر ارائه شده است [۶] در ادامه یک الگوریتم یادگیری خطی برای آتاماتای یادگیر ارائه می‌گردد. فرض کنید آتاماتای یادگیر در مرحله n م اقدام α_i خود را انتخاب نموده و محیط ارزیابی خود را توسط سیگنال تقویتی $\beta(n)$ به آتاماتای یادگیر اعلام کند. با استفاده از الگوریتم یادگیری خطی، آتاماتای یادگیر بردار احتمال انتخاب اقدام‌های خود را مطابق (۸) تنظیم می‌کند.

$$p_i(n+1) = p_i(n) + a \cdot (1 - \beta(n)) \cdot (1 - p_i(n)) - b \cdot \beta(n) \cdot p_i(n)$$

$$p_j(n+1) = p_j(n) + a \cdot (1 - \beta(n)) \cdot p_j(n) + \frac{b \cdot \beta(n)}{r-1} - b \cdot \beta(n) \cdot p_j(n) \quad \text{if } j \neq i \quad (8)$$

که a پارامتر پاداش و b پارامتر جریمه می‌باشد. اگر a و b با هم برابر باشند، الگوریتم L_{R-P} اگر b از a خیلی کوچکتر باشد، الگوریتم L_{R-EP} و اگر b صفر باشد، الگوریتم L_{R-I} نام دارد [۳].

آتاماتای یادگیر توزیع شده شبکه‌ای از چند آتاماتای یادگیر است که برای حل یک مساله مشخص با یکدیگر همکاری می‌کنند [۷]. یک آتاماتای یادگیر توزیع شده را می‌توان با یک گراف جهت‌دار مدل کرد. به صورتی که مجموعه گره‌های آن را مجموعه‌ای از آتاماتاهای یادگیر و یال‌های خروجی هر گره مجموعه اعمال متناظر با آتاماتای یادگیر متناظر با آن گره است. هنگامی که آتاماتا یکی از اعمال خود را انتخاب می‌کند، آتاماتایی که در نتایج دیگر یال متناظر با آن عمل قرار دارد، فعال می‌شود [۵]. آتاماتای یادگیر توزیع شده علیرغم پاره ای محدودیت‌های ناشی از نحوه فعال شدن آتاماتاها، بارها برای حل رده وسیع و متنوعی از مسائل مورد استفاده قرار گرفته است. این مسائل غالباً در یکی از دو گروه مسائل مرتبط با نمونه‌گیری در شبکه‌های تصادفی [۸]-[۱۱] و یا تخمین مقادیر احتمالی [۱۲]-[۱۵] قابل رده بندی هستند.

$$P(\theta | E, \alpha) = \frac{P(E | \theta, \alpha)}{P(E | \alpha)} P(\theta | \alpha)$$

$$= \frac{P(E | \theta, \alpha) P(\theta | \alpha)}{\int_{\theta} P(E | \theta, \alpha) P(\theta | \alpha) d\theta} \quad (7)$$

در (۷) $P(E | \theta, \alpha) = \prod_k P(e_k | \theta)$ است.

یادگیری پارامتری شبکه بیزی به کمک داده‌های ناقص:

تخمین پارامترهای یک شبکه بیزی برای داده‌های ناقص، پیچیده‌تر است. الگوریتمی که غالباً برای این حالت مورد استفاده قرار می‌گیرد، الگوریتم EM یا نسخه‌هایی بهبود یافته از آن است. [۲]

Algorithm EM

- Choose an $\varepsilon > 0$ (stopping criterion)
- Let $\theta^0 = \{\theta_{ijk}\}$

$$1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq |sp(x_i)| - 1$$

$$1 \leq j \leq |sp(pa(x_i))|$$
- Set $t=0$
- Repeat
 - **E-Step:** for each $1 \leq i \leq n$ calculate the table of expected counts

$$E_{\theta} [N(X_i, Pa(X_i)) | D] = \sum_{d \in D} P(X_i, Pa(X_i) | d, \theta)$$
 - **M-Step:** use the expected counts as if they were actual counts to calculate a new maximum likelihood estimator for all θ_{ijk}

$$\hat{\theta}_{ijk} = \frac{E_{\theta} [N(X_i, Pa(X_i) = j) | D]}{\sum_{h=1}^{|sp(X_i)|} E_{\theta} [N(X_i = h, Pa(X_i) = j) | D]}$$
 - Set $\theta^{t+1} = \hat{\theta}$
- **Until** $|\log_2 P(D | \theta^{t+1}) - \log_2 P(D | \theta^t)| \leq \varepsilon$

فرض کنید ساختار B روی مجموعه متغیرهای $U = \{X_1, \dots, X_n\}$ مفروض باشد. ضمناً θ_{ijk} نشان دهنده پارامترهای متناظر با احتمال شرطی $P\{X_i = k | Pa(X_i) = j\}$ باشد (احتمال متغیر X_i که در k امین حالت خود قرار دارد با شرط مفروض بودن Z امین پیکربندی برای گره‌های والد آن) با استفاده از این نمادگذاری می‌توانیم تخمین θ_{ijk} مبتنی بر درست‌نمایی بیشینه را برای پارامتر θ_{ijk} بر اساس داده $D = \{d_1, \dots, d_m\}$ متشکل از m نمونه و با استفاده از الگوریتم EM محاسبه کنیم [۸].

ایده کلی این الگوریتم، مقداردهی اولیه به مقادیر نامعلوم (یا مقادیر احتمالی یکسان) و به روزرسانی جدول احتمالات شرطی تا رسیدن به یک شرط خاص است.

مروری بر برخی کارهای انجام شده:

بحث یادگیری پارامترهای شبکه بیزی و الگوریتم‌های ارائه شده برای آن از تنوع بالایی برخوردار است. در میان کارهایی که در این خصوص صورت گرفته است کارهای [۱۶]، [۱۷] مشابهت بیشتری با مجموعه کار انجام شده در این مقاله دارد.

در [۱۶] نویسنده مساله یادگیری پارامترهای یک شبکه بیزی با بروز شواهد جدید را مورد بررسی قرار داده است. به بیان فرمال، فرض کنید Z_i یک گره در یک شبکه بیزی باشد که مجموعه مقادیر $\{Z_i^1, Z_i^2, \dots, Z_i^{t_i}\}$ را اختیار می‌کند. علاوه بر این Pa_i مجموعه والدین گره Z_i است که مقادیر $\{Pa_i^1, Pa_i^2, \dots, Pa_i^{q_i}\}$ را اتخاذ می‌کند. در این صورت یک مدخل در جدول احتمالات شرطی یا CPT مربوط به Z_i با $(Pa_i = Pa_i^j)$ $\theta_{ijk} = P(Z_i = Z_i^K | Pa_i = Pa_i^j)$ نشان داده می‌شود. علاوه بر این فرض شده است یک شبکه با مجموعه پارامترهای فعلی $\bar{\theta}$ موجود بوده و یک مجموعه از داده‌های جدید (یا استفاده شده قبلی) $D = \{y_1, \dots, y_N\}$ موجود باشد نویسنده مقدار جدید پارامتر θ را در طی فرآیند به روزرسانی بر اساس داده‌های موجود، تابعی از مقدار درست‌نمایی داده‌ها بر اساس پارامتر جدید و فاصله میان دو مدل فرض کرده و رابطه کلی زیر را استخراج کرده است:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} [F(\theta)] = \arg \max_{\theta} [\phi L_D(\theta) - d(\theta, \bar{\theta})]$$

نویسنده در ادامه، معیارهایی برای فاصله بین دو مدل معرفی کرده است و این روش را که $EM(\phi)$ نامیده است با روش EM معمول مقایسه و نشان داده است که این روش توسعه‌ای بر روش EM است. در [۱۶] نشان داده شده است که مقادیر مختلف ϕ منجر به سرعت‌های مختلف همگرایی می‌شود. پارامتر ϕ کنترل‌کننده میزان اتکاء به گذشته است و هرچه قدر مقدار آن به ۱ نزدیک‌تر باشد اثرپذیری مدل از داده‌های ورودی جدید بیشتر خواهد شد. در عوض هر قدر این مقدار به صفر نزدیک‌تر باشد، پارامترها آهسته‌تر از پارامترهای قبلی فاصله می‌گیرند.

در [۱۷] نویسنده آنالیز ارائه شده در [۱۶] را ساده‌تر کرده و با فرض این‌که داده ناموجود نداشته باشیم، به روابط ساده‌تری برای به‌روزرسانی پارامترها بر اساس داده ورودی و مقادیر قبلی پارامترها رسیده است. این قانون به شیوه افزایش یا کاهش مقادیر پارامترها عمل می‌کند. روابطی که به دست آمده‌اند به صورت زیر است:

$$\theta_{ijk}^T = \begin{cases} \phi + (1-\phi)\theta_{ijk}^{T-1} & P(Pa_i^j | y_T) = 1, P(Z_i^K | y_T) = 1 \\ (1-\phi)\theta_{ijk}^{T-1} & P(Pa_i^j | y_T) = 1, P(Z_i^K | y_T) = 0 \\ \theta_{ijk}^{T-1} & otherwise \end{cases}$$

برای تعیین میزان افزایش یا کاهش یا همان ϕ ، از برخی خواص توزیع مقادیر پارامتر θ استفاده و همگرایی الگوریتم تسریع شده است.

ایده استفاده از یک آتاماتای یادگیر برای یادگیری پارامتری یک شبکه بیزی نخستین بار در [۱۸] و برای یادگیری پارامترهای یک شبکه دسته‌بندی کننده ساده مورد استفاده قرار گرفته است. در الگوریتم ارائه

شده، یک آتاماتای یادگیر در هر گره متناظر با کلاس طبقه بندی کننده، فرآیند به روزرسانی پارامترها را بر اساس داده‌های ورودی انجام می‌دهد.

۳- الگوریتم پیشنهادی:

همانگونه که توضیح داده شد، در یک شبکه بیزی، هر گره، یک توزیع شرطی را مدل می‌کند. به این ترتیب، به منظور استفاده از آتاماتای یادگیر و آتاماتای یادگیر توزیع شده برای یادگیری توزیع CPD متناظر با هر گره، بایستی یادگیری را به گونه ای ترتیب داد که در نهایت به توزیع مدنظر منجر شود. برای بررسی نحوه انجام کار، گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید

تعریف ۳: توزیع برنولی با پارامتر θ یک توزیع احتمالی گسسته است که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$P(y | \theta) = \theta^y (1-\theta)^{1-y} \quad y = \{0,1\} \text{ and } \theta \in [0,1]$$

مطابق با این تعریف y دارای مقدار ۱ با احتمال θ و مقدار ۰ با احتمال $1-\theta$ است.

گزاره ۱: فرض کنید یک آتاماتای یادگیر تصادفی با دو اقدام a_1 و a_2 در یک محیط تصادفی قرار دارد. بازخورد محیط تصادفی به اقدام‌های این آتاماتا از یک توزیع برنولی با پارامتر θ تبعیت می‌کند. (اگر اقدام a_1 انتخاب شده باشد با احتمال θ پاداش می‌گیرد) الگوریتم مورد استفاده توسط آتاماتای یادگیر الگوریتم L_{R-P} است و در آن $\alpha = \beta$. در صورتی که آزمایش به تعداد کافی انجام شود، $E[p_1] = p(a_1) = \theta$ و

$$E[p_2] = p(a_2) = 1 - \theta$$

اثبات: برای اقدام a_1 اثبات می‌کنیم. برای دومی مشابه همین است. ضمناً فرض می‌کنیم پارامتر یادگیری مقدار ثابت a باشد (و مانند آنچه که در الگوریتم ارائه شده است در طول زمان تغییر نمی‌کند) الگوریتم مورد استفاده توسط آتاماتای یادگیر الگوریتم $R-P$ است بنابراین

$$p_1^{t+1} = (1-a)p_1^t + aI^{t+1} \quad (۹)$$

در رابطه (۹)

$$I^{t+1} = \begin{cases} 1 & \text{with probability } \theta \\ 0 & \text{with probability } (1-\theta) \end{cases} \quad (۱۰)$$

I^{t+1} یک فرآیند تصادفی برنولی با پارامتر θ است. علاوه بر این داریم:

$$E[p_1^{t+1}] = (1-a)E[p_1^t] + aE[I^{t+1}] = (1-a)E[p_1^t] + a\theta \quad (۱۱)$$

از رابطه بازگشتی (۱۱) داریم:

$$E[p_1^{t+1}] = (1-a)^t E[p_1^0] + (1-(1-a)^t) \cdot \theta$$

با توجه به این‌که $0 < a < 1$ رابطه بالا نشان می‌دهد که $\lim_{t \rightarrow \infty} E[p_1^t] = \theta$

نکته: اگر مقدار پارامتر یادگیری را همانند آنچه که در الگوریتم مدنظر

می‌کند و آتاماتا بر اساس این سیگنال، بردار احتمال انتخاب اقدام‌های خود در آن گروه را به روزرسانی می‌کند.

۴- یک اجرا یا Run برای آتاماتای یادگیر توزیع شده توسعه یافته عبارت است از یک مجموعه مرتب A از اقدام‌های تمامی آتاماتاها؛ $A = (a_1, a_2, \dots, a_V)$ به عبارت دیگر، یک اجرا برابر است با فعال شدن کلیه آتاماتاها به ترتیب توپولوژیکی و اعمال اقدام انجام شده به محیط و دریافت سیگنال تقویتی از محیط.

Algorithm L_{R-I} -Based Update Bayesian Parameters

```

1: Parameters Real  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $G = (V, E)$ ,  $S$ 
2: for  $i \leftarrow 1$  to  $|V|$  do
3:   for  $j \leftarrow 1$  to  $g(i)$  do
4:      $p_{i,j} \leftarrow 1/S_i$ 
5:   end for
6: end for
7: loop
8:   for  $i \leftarrow 1$  to  $|V|$  do
9:     compute  $g$  according to parents (i) actions
10:    Draw randomly an action  $\hat{i}$  in group  $g$  according to probabilities  $p_{1,g}, \dots, p_{K,g}$ 
11:    Receive either reward or penalty
12:    if reward then
13:      for  $j \leftarrow 1$  to  $K$  do
14:        if  $j \neq i$  then
15:           $p_{j,g} \leftarrow (1-\alpha)p_{j,g}$ 
16:        else
17:           $p_{i,g} \leftarrow p_{i,g} + \alpha(1-p_{i,g})$ 
18:        end if
19:      end for
20:       $\alpha = \text{update}(\alpha)$ 
21:    else
22:      Donothing
23:    end if
24:  end for
25: end loop

```

گزاره ۲: فرض کنید یک آتاماتای یادگیر توزیع شده توسعه یافته با دو آتاماتای LA_1 و LA_2 مفروض باشند. که در آن $parents(LA_1) = \emptyset$ و $parents(LA_2) = LA_1$. محیط تصادفی به اقدام آتاماتای ۱ بر اساس توزیع دودویی برنولی با پارامتر θ_1 و به اقدام آتاماتای ۲ بر اساس توزیع دودویی برنولی با پارامتر θ_2 پاداش می‌دهد.

$$E[p_{11}] = p(a_{1,1}) = \theta_1\theta_2 \quad \text{و} \quad E[p_1] = p(a_1) = \theta_1$$

اثبات: در مورد اینکه $p(a_1) = \theta_1$ با توجه به اینکه انتخاب اقدام توسط LA_1 مستقل از اقدام سایر آتاماتاها است، مشابه با گزاره ۱ قابل بررسی است. اما در مورد LA_2 . چون انتخاب گروه اقدام توسط آتاماتا به اقدام LA_1 بستگی دارد، محاسبه را مجدداً انجام می‌دهیم.

برای سادگی محاسبات جدول احتمالات زیر که وضعیت هر اقدام آتاماتای LA_2 و احتمال پاداش یا جریمه شدن آن را نشان می‌دهد را در نظر بگیرید:

است مقداری پویا در نظر بگیریم نیز تغییری در این روابط حاصل نمی‌شود و داریم:

$$E[p_1^{t+1}] = \prod_{k=1}^t (1-a^k) E[p_1^0] + \left(1 - \prod_{k=1}^t (1-a^k)\right) \theta$$

و مجدداً همین نتیجه قابل حصول است.

آتاماتای یادگیر توزیع شده توسعه یافته:

در بخش قبل آتاماتای یادگیر توزیع شده را معرفی کردیم؛ شبکه‌ای از آتاماتاها که با همکاری یکدیگر، برای حل یک مساله به کار می‌روند. در این بخش، نسخه‌ای توسعه یافته از آتاماتای یادگیر توزیع شده را معرفی می‌کنیم که قادر به استخراج جداول احتمال شرطی متناظر با یک شبکه بیزی است. توسعه آتاماتای یادگیر توزیع شده در [۱۹] ارائه شده است.

تعریف ۲: یک آتاماتای یادگیر توزیع شده توسعه یافته DLA با سه

تابی $DLA = (V, E, S)$ تعریف می‌شود که در آن:

الف- $G = (V, E)$ یک گراف جهت‌دار فاقد دور (dag) است و در آن

$$V = \{LA_i \mid i = 1, 2, \dots, |V|\}$$

مجموعه‌ای از آتاماتاها یادگیر است. اندیس آتاماتاها بر اساس ترتیب توپولوژیکی گره‌های گراف G مرتب شده است. E ، مجموعه یال‌های جهت‌دار است.

ب- $S = \{S_i \mid i = 1, 2, \dots, |V|\}$ و S_i تعداد اقدام‌های قابل انجام توسط آتاماتای LA_i است. این مقدار را به صورت $S(LA_i) = S_i$ نیز نشان می‌دهیم. ضمناً هر آتاماتا LA_i به تعداد g_i گروه اقدام دارد که g برابر با حاصل ضرب تعداد اقدام‌های آتاماتاها متناظر با گره‌های والد V_i در گراف G است. در حقیقت:

$$g = g(i) = \prod_j S_j \quad \forall j \text{ which } V_j \in \text{Parent}(V_i)$$

الگوریتم جدید پیشنهادی برای یادگیری پارامترهای یک

شبکه بیزی در حالت داده‌های کامل:

با توجه به مفهومی که از آتاماتای یادگیر توزیع شده ارائه گردید و با توجه به گزاره ۱، می‌توان یک ساختار شبکه‌ای از آتاماتاها یادگیر در قالب یک آتاماتای یادگیر توزیع شده ارائه داد که قادر به تخمین توزیع توأم متغیرهای تصادفی برای استفاده در یادگیری پارامتری شبکه‌های بیزی باشد. هر آتاماتای یادگیر در این سیستم، به شکل زیر عمل می‌کند:

۱- یک آتاماتا تا زمانی که کلیه والدهای آن فعال نباشند فعال نخواهد بود. زمانی که یک آتاماتا فعال باشد قادر است اقدامی را انجام دهد و آن را به محیط اعمال کند.

۲- اگر در یک زمان چندین آتاماتا فعال باشند، ترتیب اقدام توسط آنها به ترتیب توپولوژیکی گره‌های متناظر آنها در گراف G است.

۳- یک آتاماتا بر اساس نوع اقدام انجام شده توسط آتاماتاها والدش یکی از گروه‌های اقدام را فعال می‌کند. سپس در آن گروه اقدامی را به تصادف انتخاب کرده و آن را به محیط اعمال می‌کند. محیط بر اساس نوع اقدام انجام شده یک سیگنال تقویتی بازخوردی تولید

نمونه استفاده شده است. روش کار به این صورت است که یک شبکه بیزی پارامتری شده انتخاب شده و از روی آن نمونه‌هایی گرفته شده است. سپس یک شبکه بیزی پارامتری نشده با استفاده از این نمونه‌ها آموزش داده شده است. برای آموزش شبکه‌های بیزی از جعبه ابزار BNT که توسط Murphy [۲۰] برای این منظور در Matlab طراحی شده، استفاده کرده‌ایم. روش جدید پیشنهادی نیز توسط Matlab پیاده سازی شده است. برای مقایسه روش جدید با روش تخمین بیزی از شاخص ضریب همبستگی استفاده شده است.

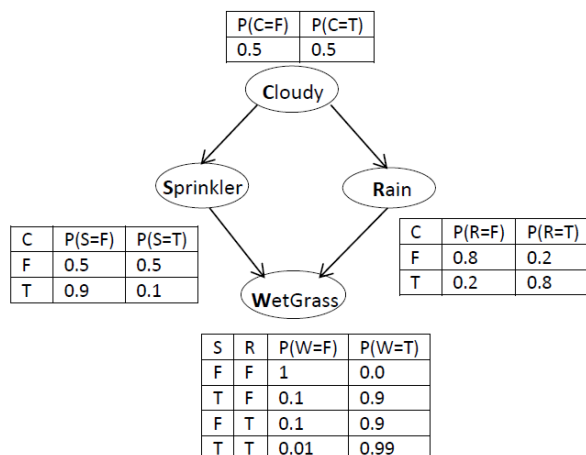
ضریب همبستگی: این شاخص، هماهنگی و وابستگی میان دو بردار هم‌اندازه را توصیف می‌کند. اگر بردار X کلیه مقادیر توزیع‌های احتمالی حاصل از الگوریتم مبتنی بر DLA را برای یک گره خاص در شبکه بیزی نشان دهد (با یک ترتیب مشخص) و بردار Y مقادیر واقعی توزیع‌های احتمالی همان گره را (با همان ترتیب) نشان دهد، در این صورت ضریب همبستگی میان X و Y می‌تواند شاخصی از نحوه عملکرد الگوریتم به دست دهد. بدین ترتیب که هر چقدر دو بردار X و Y به یکدیگر شبیه‌تر باشند، این عدد به ۱ نزدیک‌تر شده و نشان می‌دهد که الگوریتم بهتر عمل کرده است و علاوه بر این، نحوه تغییرات این دو در طول آموزش می‌تواند شاخصی از نحوه همگرایی الگوریتم باشد. مقدار Correlation میان دو بردار X و Y بر اساس (۱۳) تعریف می‌گردد:

$$\rho_{X,Y} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{E(X^2) - E^2(X)} \sqrt{E(Y^2) - E^2(Y)}} \quad (13)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

۵- بررسی تجربی

برای بررسی مقدماتی عملکرد الگوریتم پیشنهادی ارائه شده، از یک شبکه ساده بیزی با ۴ گره استفاده کرده ایم (شکل ۱).



شکل ۱: شبکه نمونه

برای بررسی الگوریتم از یک نمونه ۵۰۰ تایی از داده‌ها استفاده کرده‌ایم. در شکل ۲ نحوه همگرایی مقادیر مربوط به گره WetGrass را

اقدام	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$
P(r)	$\theta_2 \theta_1$	$\theta_2(1-\theta_1)$	$(1-\theta_2) \theta_1$	$(1-\theta_2)^* (1-\theta_1)$
P(p)	$(1-\theta_2) \theta_1$	$(1-\theta_2)^* (1-\theta_1)$	$\theta_2 \theta_1$	$\theta_2(1-\theta_1)$

اگر $\Delta_{1,1}^t$ میزان افزایش احتمال اقدام $p(a_{1,1})$ را در اجرای t ام نشان دهد، $\Delta_{1,1}^t$ تابعی از اقدام‌های آتوماتاها و بازخوردی است که از محیط دریافت می‌کند و امید ریاضی مقدار آن برابر است با:

$$E[\Delta_{1,1}^t] = \theta_2 \theta_1 (a^t - a^t E[p_{1,1}^t]) + (1-\theta_2) \theta_1 (-a^t E[p_{1,1}^t]) + (1-\theta_2)^* \theta_1 (-a^t E[p_{1,1}^t]) + \theta_2 \theta_1 (a^t - a^t E[p_{1,1}^t])$$

$$= 2a^t \theta_2 \theta_1 - 2a^t \theta_1 E[p_{1,1}^t]$$

به این ترتیب، رابطه بازگشتی زیر برای دنباله مقادیر $E[p_{1,1}^t]$ به دست می‌آید:

$$E[p_{1,1}^{t+1}] = 2a^t \theta_2 \theta_1 + (1-2a^t \theta_1) E[p_{1,1}^t] \quad (12)$$

(۱۲) نشان می‌دهد که

$$E[p_{1,1}^{t+1}] - \theta_2 \theta_1 = (1-2a^t \theta_1) (E[p_{1,1}^t] - \theta_2 \theta_1)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[p_{1,1}^t] = \theta_2 \theta_1 \quad \text{لذا}$$

از آنجا که $\theta_2 = P(LA_2 = 1 | LA_1 = 1)$ و $\theta_1 = P(LA_1 = 1)$ در این صورت $\theta_2 \theta_1 = P(LA_2 = 1, LA_1 = 1)$. به این ترتیب، اگر محیط به صورت شرطی به اقدام‌های آتوماتای توزیع شده توسعه یافته پاسخ دهد، الگوریتم و ساختار ارائه شده قادر به یادگیری توزیع احتمال توام موردنیاز برای ساخت شبکه بیزی خواهد بود. به همین روش می‌توان نشان داد که:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} E[p_{1,1}^t] & E[p_{1,2}^t] \\ E[p_{2,1}^t] & E[p_{2,2}^t] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_2 \theta_1 & \theta_2^* (1-\theta_1) \\ (1-\theta_2)^* \theta_1 & (1-\theta_2)^* (1-\theta_1) \end{bmatrix}$$

عملکرد الگوریتم با داده‌های ناکامل:

یکی از شرایطی که در یادگیری پارامتری یک شبکه بیزی بایستی مدنظر قرار گیرد، وجود داده‌های ناکامل است. داده‌هایی که به دلایل مختلف نظیر ناقص و یا نویزی بودن، بی‌معنی بودن و نظایر آن، در یادگیری قابل استفاده نیستند. الگوریتم جدید ارائه شده قادر است رفتار الگوریتم EM را تقلید کند و از این نظر دقتی برابر با EM دارد. نحوه کار بسیار ساده است. در هر نمونه‌ای که برای یادگیری استفاده می‌شود، چنانچه داده‌ای وجود نداشت، داده تصادفی - معادل با اقدام تصادفی - انتخاب شده توسط آتوماتای یادگیر به عنوان داده جایگزین انتخاب می‌شود و این مقدار در نمونه مورد آموزش، جایگزین مقدار ناموجود می‌شود.

۴- بررسی نتایج عملی:

برای بررسی نحوه عملکرد روش جدید پیشنهادی از شبکه‌های بیزی

است. قابلیت استفاده برخط الگوریتم، قابلیت تطبیق الگوریتم با شرایطی که داده‌های ناموجود در نمونه‌ها موجود باشند، افتراقی بودن روش، قابلیت استفاده مکرر از نمونه‌ها برای تنظیم کردن مقادیر پارامترها، همگی از ویژگی‌های روش جدید مبتنی بر آتاماتا هستند. از کاربردهای روش پیشنهادی مبتنی بر آتاماتا می‌توان به ساخت و استفاده از شبکه بی‌بزی در محیط وب و برای داده‌کاوی نحوه استفاده از وب اشاره کرد.

مشاهده می‌کنید. در مراحل بعدی الگوریتم پیشنهادی روی داده‌های نمونه ورودی با ۱۰٪ و ۳۰٪ نویز اعمال شد (داده ناموجود). نتایج یادگیری به ترتیب در شکل ۳ و شکل ۴ نشان داده شده است. شاخص correlation برای WetGrass در حالت داده کامل در شکل ۵ نشان داده شده است.

جدول ۱: پارامترهای مورد استفاده در آموزش آتاماتای یادگیر توزیع شده توسعه یافته

پارامتر	مفهوم	مقادیر
Train_type	نحوه استفاده از نمونه‌ها: تکراری یا بدون تکرار	{normal, repeat}
Repeat_no	در صورتیکه استفاده تکراری از نمونه‌ها مجاز باشد، تعداد دفعات تکرار را مشخص می‌کند	1, 2, ...
Random_Select	داده‌های نمونه را به ترتیب مورد استفاده قرار دهیم یا انتخاب تصادفی ممکن است	{yes, no}
a	مقدار اولیه پارامتر یادگیری که برای کلیه آتاماتاها به صورت یکسان مقداردهی می‌شود	$a \in (0, 1)$
Update(a)	تابعی که نحوه تنظیم کردن مقدار a را پس از هر دور یادگیری نشان می‌دهد	-

۷- مراجع

- [1] F. V. Jensen and T. D. Nielsen, *Bayesian Networks and Decision Graphs*. Springer, 2007.
- [2] D. Heckerman and D. M. Chickering, "Learning Bayesian Networks: The Combination of Knowledge and Statistical Data Metrics for Belief Networks.," *Mach. Learn.*, vol. 20, no. 3, pp. 197-243, 1995.
- [3] M. L. Thathachar and P. S. Sastry, "Varieties of learning automata: an overview.," *IEEE Trans. Syst. Man. Cybern. B. Cybern.*, vol. 32, no. 6, pp. 711-22, Jan. 2002.
- [4] K. S. Narendra and M. A. L. Thathachar, "Learning Automata: A survey," *IEEE Trans. Syst. Man, Cybern. - Part A Syst. Humans*, vol. SMC-14, pp. 323-334, 1974.
- [5] H. Beigy and M. R. Meybodi, "Intelligent Channel Assignment in Cellular Networks: A Learning Automata Approach," Amirkabir University of Technology, 2004.
- [6] A. S. Poznyak and K. Najim, *Learning Automata and Stochastic Optimization (Lecture Notes in Control and Information Sciences)*, vol. 225. London: Springer-Verlag, 1997.
- [7] H. Beigy and M. R. Meybodi, "Utilizing Distributed Learning Automata To Solve Stochastic Shortest Path Problems," *Int. J. Uncertainty, Fuzziness Knowledge-Based Syst.*, vol. 14, no. 5, pp. 591-615, Oct. 2006.
- [8] M. R. Mollakhali Meybodi and M. R. Meybodi, "A New Distributed Learning Automata Based Algorithm for Solving Stochastic Shortest Path," in *6th Conference on Intelligent Systems*, 2004.
- [9] M. R. Meybodi and H. Beigy, "A Sampling Method Based on Distributed Learning Automata," in *the 10th Iranian conference on Electrical Engineering*, 2002, vol. I, no. May.
- [10] A. Motevalian and M. R. Meybodi, "Solving Maximal Independent Set Problem Using Distributed Learning Automata," in *14th Iranian Electrical Engineering Conference (ICEE2006)*, 2006, vol. 1.
- [11] A. Alipour and M. R. Meybodi, "Solving Traveling Salesman Problem Using Distributed Learning Automata," in *0th Annual CSI Computer Conference*, 2005, pp. 759-761.
- [12] A. Baradaran Hashemi and M. R. Meybodi, "Web Usage Mining Using Distributed Learning Automata," in *12th Annual CSI Computer Conference of Iran*, 2007, pp. 553-560.
- [13] M. R. Mollakhali Meybodi and M. R. Meybodi, "A Distributed Learning Automata Based Approach for User Modeling in Adaptive Hypermedia," in *Congress on Electrical, Computer and Information Technology*, 2012.
- [14] M. R. Mollakhali Meybodi and M. R. Meybodi, "Link Prediction in Adaptive Web Sites Using Distributed Learning Automata," in *13th Annual CSI Computer Conference of Iran*, 2008.
- [15] B. Anari and M. R. Meybodi, "A Method based on distributed learning automata for determining web documents structure," in *12th Annual CSI Computer Conference of Iran*, 2007, pp. 2276-2282.
- [16] E. Bauer, D. Koller, and Y. Singer, "Update Rules for Parameter Estimation in Bayesian Networks," in *Proceedings of the Thirteenth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI1997)*, 1997, pp. 3-13.
- [17] I. Cohen, A. Bronstein, F. G. Cozman, and N. M. A. Urbana, "Online Learning of Bayesian Network Parameters," 2001.
- [18] N. A. Rezvani and M. R. Meybodi, "A Learning Automata-Based Technique for Training Conditional Probability Tables of Bayesian Network," in *14th National Conference of Iran Computer Society (CSICC'09)*, 2009.
- [19] M. R. M. Meybodi and M. R. Meybodi, "Extended Distributed Learning Automata: A New Method for Solving Stochastic

بررسی عملکرد الگوریتم در شبکه‌های بزرگ:

شبکه ICU Alarm یک شبکه بی‌بزی با ۳۷ گره و ۵۰۹ پارامتر است. این شبکه یکی از نمونه‌های واقعی و بزرگ شبکه‌های بی‌بزی است. این شبکه توسط [۲۱] معرفی شده است و مدل مورد استفاده در این مقاله از [۲۲] گرفته شده است. برای بررسی نحوه عملکرد الگوریتم پیشنهادی و مقایسه آن با الگوریتم EM از هر کدام از شبکه‌های موجود یک نمونه ۵۰۰ تایی انتخاب شد. سپس به صورت هم‌زمان روی دو شبکه بی‌بزی با ساختارهایی یکسان با ساختار شبکه بی‌بزی مورد استفاده، عملیات یادگیری پارامتری با دو روش تخمین بی‌بزی و روش جدید مبتنی بر آتاماتای یادگیر توزیع شده توسعه یافته، انجام شد. نمودار مقایسه شاخص را برای دو گره ۲۶ و ۲۸ در شکل ۶ و شکل ۷ آورده‌ایم. در مورد اکثر گره‌ها وضع به همین شکل است.

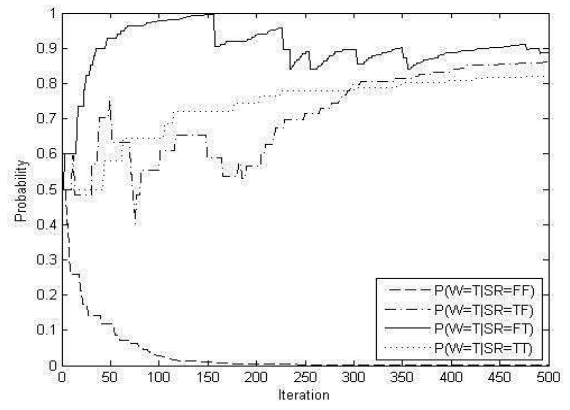
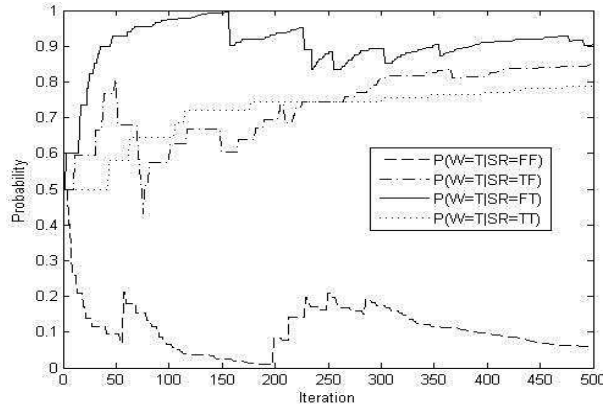
۶- نتیجه گیری:

در این مقاله یک چارچوب مبتنی بر شبکه‌ای از آتاماتاهای یادگیر، موسوم به آتاماتای یادگیر توزیع شده برای مساله یادگیری پارامتری شبکه‌های بی‌بزی ارائه شد. نتایج بررسی ریاضی و عملکرد الگوریتم روی شبکه‌های نمونه حاکی از برابری دقت این روش با روش‌های موجود است. علاوه بر اینکه به دلیل استفاده از روابط خطی مورد استفاده در آتاماتای یادگیر، روش جدید پیشنهادی از سربار محاسباتی کمی برخوردار

Graph Optimization Problems,” *eprint arXiv:1308.2772*, p. 37, Aug. 2013.

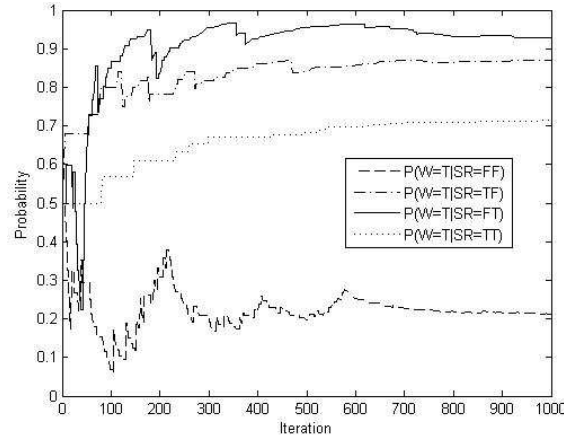
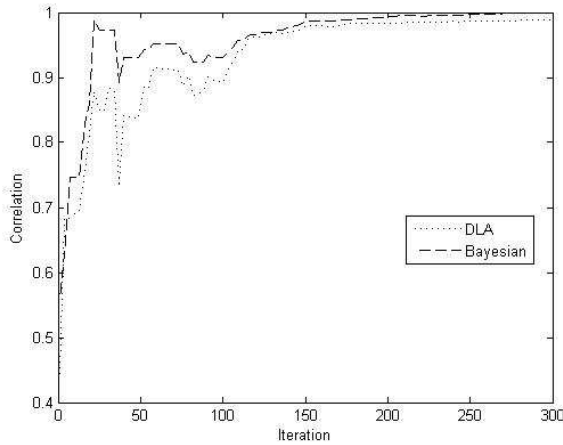
[20] Murphy Kevin P., “An Introduction to Graphical Models.” 2001.
 [21] C. B. G., G. Suermondt, and R. Chavez, “The ALARM monitoring system: A case study with two probabilistic inference techniques for belief networks,” in *2’nd European Conf on AI and Medicine*, 1989.

[22] “Bayesian Network Repository.” [Online]. Available: <http://www.cs.huji.ac.il/~galel/Repository>.



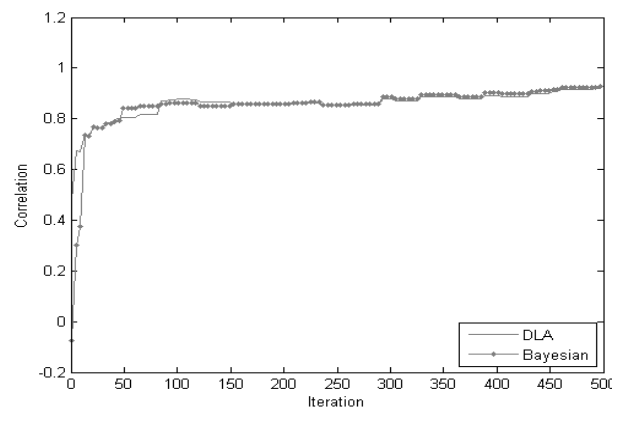
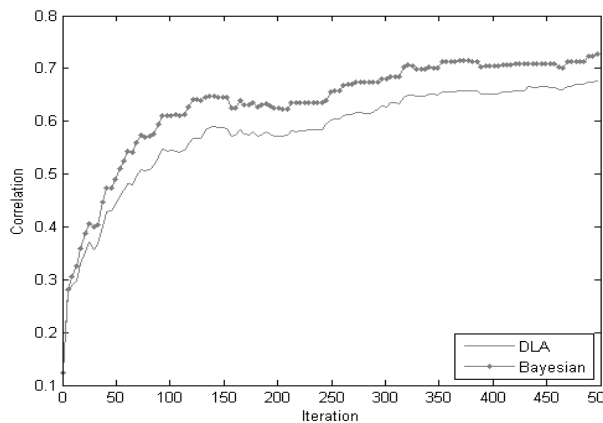
شکل ۲: نحوه همگرایی بردار احتمال انتخاب اقدام‌های آناماتای متناظر با گره WetGrass به توزیع متناظر در شبکه بی‌زی مثال با ۱۰٪ داده ناموجود

شکل ۳: نحوه همگرایی بردار احتمال انتخاب اقدام‌های آناماتای متناظر با گره WetGrass به توزیع متناظر در شبکه بی‌زی مثال با داده کامل



شکل ۴: بررسی نحوه همگرایی مقادیر بردار احتمال اقدام‌های آناماتای حاصل از DLA و روش تخمین بی‌زی

شکل ۵: مقایسه ضریب همبستگی بین بردار احتمال گره WetGrass و بردارهای حاصل از DLA و روش تخمین بی‌زی



شکل ۶: مقایسه شاخص ضریب همبستگی میان بردار واقعی و بردار یادگرفته شده در گره شماره ۲۶ از ICUAlarm

شکل ۷: مقایسه شاخص ضریب همبستگی میان بردار واقعی و بردار یادگرفته شده در گره شماره ۲۸ از ICUAlarm